Berechnung der Störgrößen von hochelliptischen Satellitenbahnen.

von Franz J. Bellen, 46537 Dinslaken, E-Mail: dj1yq@t-online.de

1. Einführung

AMSAT OSCAR-10 und OSCAR-40 bewegen sich auf hochelliptischen Bahnen.
Alle übrigen Amateursatelliten umrunden in nahezu kreisförmigen Orbits in einer Höhe von 500 bis 2000 km die Erde. Die Beeinflussung durch Sonne und Mond kann hier vernachlässigt werden. Der Einfluss der nicht kugelförmigen Erde auf die Bahnen ist jedoch wie bei allen Satelliten vorhanden, u.zw. wird die Bahnebene selbst und die Bahnellipse in der Bahnebene gedreht (Knoten- und Apsidendrehung). Die Apsidendrehung ist bei den LEOSs (Low Earth Orbit Satellite) wegen der Orbitform kaum wahrnehmbar, die Knotendrehung (Rektaszension) verschiebt nur die Kommunikationszeiten.
Bei AO-10 und AO-40 sieht die Welt schon anders aus. Hochelliptische Satellitenbahnen mit einem Verhältnis

große Halbachse (a) : Erdachse (R) => 3

(AO-10: a/R ~ 4, AO-40: a/R ~ 6) verlangen zusätzlich für Langzeitberechnungen die Berücksichtigung der Gravitation von Sonne und Mond. Im Apogäum (h_a) sind diese Satelliten ~36000 bzw. ~58000 km von der Erde entfernt. Bei ihnen werden durch die Gestirne die Keplerelemente: Exzentrizität (e), Inklination (i), Perigäumwinkel (ω) sowie der R.A.A.N. (Ω) beeinflusst. Welche Ausmaße diese Störungen annehmen können, haben wir bei OSCAR-13 erfahren müssen: nach 8.5 Jahren stürzte er ab.
Unser geplante Satellit P3-E wird voraussichtlich eine Bahn ähnlich der von AO-10 oder AO-13 haben [1]. Da es keine stabilen hochelliptischen Satellitenbahnen gibt, muss in jedem Fall vorher gerechnet werden.
Dieser Beitrag ermöglicht es denjenigen Amateuren, die gerne programmieren, sich mit möglichen Orbits von P3-E zu beschäftigen.
Im Abschnitt 2 werden die Bahnstörungen durch unsere Erde, im Abschnitt 3 durch Sonne und Mond behandelt.
Auf physikalische und mathematische Grundlagen soll hier nicht eingegangen werden. Der Verfasser empfiehlt, diese bei Manfred Maday, DC9ZP, [2] nachzulesen. Empfehlenswert als Einführung sind auch die Artikel von Norbert Notthoff, DF5DP, [3].
Die aufgeführten mathematischen Zusammenhänge sind aus Veröffentlichungen von G. E. Cook, Dr. V. Kudielka, OE1VKW, und O. Montenbruck entnommen, siehe Literaturangaben.
Die Erdatmosphäre und der Sonnenstrahlungsdruck bleiben wegen des geringen Einflusses für die Langzeitbetrachtung unberücksichtigt.
Ein mit den aufgeführten Formeln entwickeltes Computerprogramm wird beschrieben (Stand 2002), und kann auf der Homepage des Verfassers als Quelle und EXE-File downgeloaded werden.
Da kein Satellit ohne Sonnenenergie zur On-Board-Stromerzeugung leben kann, wurde die Sonnenwinkelberechnung nach J. Miller, G3RUH, [11] zusätzlich in das Programm aufgenommen.
Unter Perigäum- und Apogäumhöhe kann man sich mehr vorstellen als unter Exzentrizität in Verbindung mit Umläufen/Tag. Deshalb werden die Größen h_p und h_a ebenfalls berechnet.

2. Der Erdeinfluss

Unsere Erde hat kein kugelförmiges Gravitationsfeld. Der Grund dafür liegt in der ungleichmäßigen Masseverteilung, u.a. sind die Pole abgeflacht, und die Erde ist leicht birnenförmig. Die Folge ist, dass die Satellitenbahnen nicht stabil sind.
Wie oben schon erwähnt, dreht sich die Umlaufbahn in der Umlaufebene, d.h. die Apsidenlinie (große Halbachse (a) der Ellipse) wandert. Der Winkel in der Bahnebene zwischen Apsidenlinie und der Schnittline mit dem Äquator nennt man „Argument des Perigäums", abgekürzt: ω, die tägliche Abweichung hiervon: $\Delta\omega$. Sie berechnet sich nach Formel (1).

Formel (1):

deltag = pi * 3/2 * J2 * N0 * (N/N0)E7/3 * (5 * (cos(i))E2 - 1) / (1 - eE2)E2

Formel (2):

deltah = - 2 * pi * 3/2 * J2 * N0 * (N/N0)E7/3 * cos(i) / (1 - eE2)E2

Es bedeuten:

deltag = Änderung des Perigäumwinkels/Tag [rad/Tag]
deltah = Änderung des R.A.A.N./Tag [rad/Tag]
J2 = Second Zonal Harmonic, Konstante = 0.0010826
N = MM = Mean Motion [Orbits pro Tag]
N0 = Mean Motion [Orbits pro Tag bei a = R], Konstante = 17.043
e = Exzentrizität
i = Inklination [rad]

Formelsammlung 1: Störungen durch die Erde

Beachte: Alle Winkelangaben erfolgen in Radiant, Zeichen rad. Die Umrechnung von Winkelgrad in Radiant (rad) ist wie folgt: 360 Grad = 2 * π rad
Setzt man Gleichung (1) = 0, dann erhält man für i = 63.43 Grad. Dieses ist der Wert, bei dem keine Änderung des Perigäumwinkels stattfindet.
Es liegt nun nahe, einen Satelliten auf eine solche Bahn zu schießen, um die Probleme, die mit dem Driften verbunden sind, loszuwerden. Aber auch diese Bahn ist, wie in der Einleitung schon erwähnt, wegen des Sonnen- und Mondeinflusses nicht stabil.
Die Lage der Satellitenbahn im Weltraum wird durch den R.A.A.N. (Right Ascension of Ascending Node) Ω festgelegt. Die tägliche Verschiebung dieses Winkels durch den Erdeinfluss ist $\Delta\Omega$. Die Berechnung erfolgt nach Formel (2).
Auch diese Funktion hat eine Nullstelle, u.zw. bei i = 90 Grad. Ohne die erwähnten Störer könnte hier ein Satellit friedlich seine Bahnen drehen.

3. Einfluss von Sonne und Mond

G. E. Cook hat in einer umfangreichen mathematischen Abhandlung den Gravitationseinfluss von Sonne und Mond auf Satelliten mit hochelliptischen Bahnen abgehandelt. Es würde den Rahmen dieser Abhandlung zu sehr ausweiten, ausführlich auf den Inhalt einzugehen. Es werden hier nur die Ergebnisse vorgestellt.

Ein sehr wichtiges Ergebnis ist, dass die große Halbachse (a) sich **nicht** verändert. Das bedeutet, dass auch die Umlaufzeit des Satelliten **nicht** beeinflusst wird, daher **MM = konstant**.

Daraus folgt weiter, dass eine Änderung der Exzentrizität (e) nur die kleine Halbachse (b) der Bahnellipse verändert. Die Formeln (3) bis (6) in Formelsammlung 2 berechnen die tägliche Abweichung der Keplerelemente e, i, Ω und ω. Die Formeln gelten für Sonne und Mond.

Formel (3):

```
de = - 15 * K * e * (1 - eE2)E0.5 *(A * B * cos(2g) -
     0.5 * (A * A - B * B) * sin(2g)) / (2 * n)
```

Formel (4):

```
di = 3 * K * C * (A * (2 + 3 * eE2 + 5 * eE2 * cos(2g)) +
     5 * B * eE2 * sin(2g)) / (4 * n * (1 - eE2)E0.5)
```

Formel (5):

```
dh = 3 * K * C * (5 * A * eE2 * sin(2g) +
     B * (2 + 3 * eE2 - 5 * eE2 * cos(2g))) /
     (4 * n * (1 - eE2)E0.5 * sin(i))
```

Formel (6):

```
dg = 3 * K * (1 - eE2)E0.5 * (5 * (A * B * sin(2g) +
     0.5 * (A*A - B*B) * cos(2g)) - 1 + 1.5 * (A*A + B*B)) /
     (2 * n) - dh * cos(i)
```

Es bedeuten:

de	=	Änderung der Exzentrizität/Tag
di	=	Änderung der Inklination/Tag [rad/Tag]
dh	=	Änderung des R.A.A.N./Tag [rad/Tag]
dg	=	Änderung des Perigäumwinkels/Tag [rad/Tag]
e	=	Exzentrizität
g	=	Perigäumwinkel [rad]
h	=	R.A.A.N. [rad]
i	=	Inklination [rad]
K	=	Gravitationskonstante von Sonne oder Mond, s.u.
n	=	Mean Angular Motion [rad/Tag] = 2 * pi * MM
A, B, C	=	Vektoren, siehe Formeln (7) bis (9)

Formelsammlung 2: Störungen durch Sonne und Mond

Die Vektoren A, B und C beinhalten die momentanen Positionen von Satellit und Störer, siehe hierzu Formeln (7) bis (9). Da es sich um zwei Störer handelt, muss jede Beeinflussung des Satelliten getrennt behandelt werden. Die in der Formelsammlung 3 aufgeführten Größen mit Index S/M stehen für Sonne oder Mond. Die entsprechenden Orbit Daten werden im Abschnitt 4 behandelt.

Formel (7)

```
A = cos(h - hS/M) * cos(uS/M) + cos(iS/M) * sin(uS/M) * sin(h - hS/M)
```

Formel (8)

```
B = cos(i) * (-sin(h - hS/M) * cos(uS/M) + cos(iS/M) * sin(uS/M) *
    cos(h - hS/M)) + sin(i) * sin(iS/M) * sin(uS/M)
```

Formel (9)

```
C = sin(i) * (cos(uS/M) * sin(h - hS/M) - cos(iS/M) * sin(uS/M) *
    cos(h - hS/M)) + cos(i) * sin(iS/M) * sin(uS/M)
```

Es bedeuten:

h = R.A.A.N. [rad]
i = Inklination [rad]

alle Werte mit der Erweiterung S/M beziehen sich auf das störende Gestirn und werden im Abschnitt 4 erläutert.

Formelsammlung 3: Vektorenberechnung für Sonne und Mond

4. Konstanten und Orbit Daten von Son-ne und Mond

In den Formeln (3) bis (6) ist die Gravitationskonstante K des Störers enthalten.

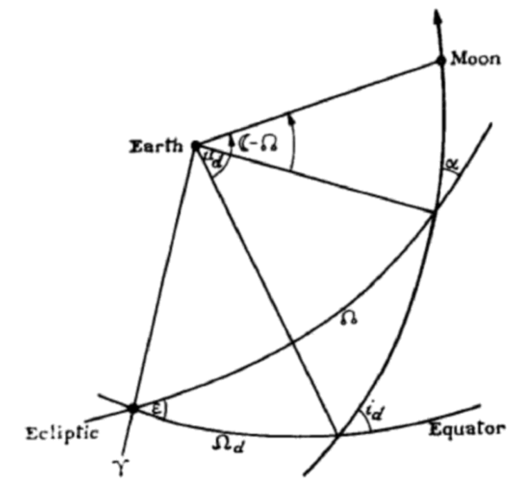

FIG. 2.—Orbital elements of the Moon.

Sie ist unterschiedlich für Sonne und Mond. Auf Grund des großen Massenverhältnisses Sonne zu Erde wird hier der Faktor 1 berücksichtigt, während das Massenverhältnis Erde zu Mond 81.45 zu 1 beträgt. Siehe hierzu die Formeln für K_{Sun} und K_{Moon} in der Formelsammlung 4 unten.

Die Vektoren A, B und C in den Formeln (7) bis (9) beinhalten jeweils 3 Glieder, die eine Winkelposition des Störers angeben: $i_{S/M}$, $\Omega_{S/M}$ und $u_{S/M}$. Bei der Bestimmung der Zahlenwerte wird vereinfachend angenommen, dass Erd- und Mondbahn kreisförmig sind.

Gravitationkonstanten **K** für Sonne und Mond:

```
KSun = (2 * pi / 365.25)E2
KMoon = (2 * pi / 27.3216)E2 / 81.45
```

Inklinationen:

iS = 23.44 Grad (Inklination der Äquatorebene gegen Ekliptik)
alpha = 5.145 Grad (Inklination der Mondbahnebene gegen Ekliptik)

Positionswinkel **(hS)** der Sonne [Grad]:

```
hS = 0
```

Mittlere Länge **(uS)** der Sonne [Grad]:

```
uS = L = 279.696678 + 36000.768925 * (JD - 2415020.0) / 36525.0
```

Mittlere Länge des Mondes [Grad]:

```
l = 270.434164 + 481267.883142 * (JD - 2415020.0) / 36525.0
```

Mittlere Länge des aufsteigenden Mondknotens-Ekliptik [Grad]:

```
OmegaEk = 259.183275 - 1934.142008 * (JD - 2415020.0) / 36525.0
```

Inklination **(iM)** des Mondes [Grad]:

```
iM = RiG(arccos(cos(GiR(iS)) * cos(GiR(alpha)) - sin(GiR(iS)) *
     sin(GiR(alpha)) * cos(GiR(OmegaEk))))
```

Mittlere Länge **(hM)** des aufsteigenden Mondknotens-Äquator [Grad]:

```
hM = OmegaAe = RiG(arcsin(sin(GiR(alpha)) * sin(GiR(OmegaEk)) /
     sin(GiR(iM))))
```

Positionswinkel **(uM)** des Mondes [Grad]:

```
uM = l - OmegaEk + RiG(arcsin(sin(GiR(iS)) *
     sin(GiR(OmegaEk)) / sin(GiR(iM))))
```

Es bedeuten:

JD = Julianisches Datum
RiG = Funktion: Radiant in Winkelgrad = 360/(2*pi)
GiR = Funktion: Winkelgrad in Radiant = 2*pi/360

Formelsammlung 4: Konstanten und Orbitparameter

Bezugsebene für die Berechnung der Orbitparameter ist die Ekliptik. Die Äquatorebene hat hierzu eine Neigung von i_S = 23.44 Grad. Die Mondbahn ist zwar konstant 5.145 Grad zur Ekliptik geneigt, i_M ist jedoch die aktuelle Inklination zur Äquatorebene, und diese muss berechnet werden.

Bei $\Omega_{S/M}$ handelt es sich um Längen (Winkel) auf der Äquatorebene, Bezug ist der Frühlingspunkt. Der Zahlenwert für die Sonne Ω_S ist daher 0. Für den Mond ist dieses die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn mit dem Äquator, Ω_M.

$u_{S/M}$ stellen Längen (Winkel) dar. u_S ist die mittlere Länge (L) der Sonne gemessen vom Frühlingspunkt. u_M ist ein Maß für die aktuelle Position des Mondes.

Fig.2 zeigt eine Graphik von Cook, die eine Erklärung der Orbitparameter des Mondes liefert. Sie ist hilfreich für die Interpretation der Parameter in Formelsammlung 4: $i_d = i_M$, $u_d = u_M$, $\Omega_d = \Omega_{Ae} = \Omega_M$, $\Omega = l$.

Um kein Durcheinander mit den Dimensionen der Positionswinkel zu bekommen, werden in der Formelsammlung 4 alle Winkel in Grad berechnet. Die Umwandlungsfunktionen „Grad in Radiant (GiR)“ und „Radiant in Grad (RiG)“ sind in den Formeln eingetragen.

Der Zeitbezug für einige Berechnungen ist das „Julianische Datum“, siehe hierzu [2].

5. Das Programm „P3Orbit“ des Verfassers

Das Programm „P3Orbit“ besteht aus dem EXE-File „P3Orbit.exe“ und dem ASCII-File „P3Orbit.kep“. Im letzten File befinden sich die zugehörigen Keplerdatensätze im NASA-Format, u.a. von AO-10, AO-13, AO-40 und drei Test-Datensätze. Das EXE-File benötigt diese Daten. Für AO-10 und AO-40 können die Daten mit aktuellen Werten überschrieben, für die Testdatensätze können mögliche Keplerdaten für P3-E eingegeben werden. Für Programmierer steht als Programmierhilfe die Quelle „P3Orbit.doc/-pdf“ zur Verfügung. Alle Files können unter

http://dj1yq.bei.t-online.de/P3Orbit.zip

downgeloaded werden.

Das Programm erstellt vier Files mit Datensätzen, die sich vorzüglich für die Erstellung von Diagrammen eignen. Die Daten werden für einen Zeitraum von 20 Jahren errechnet, der Ausgabezyklus ist jeweils der 15. eines jeden Monats. **Achtung**: Die Computeruhr wird während des Programmlaufs leicht verstellt.

5.1 Die Philosophie des Programms

Die Programmieridee ist sehr simpel. Startzeit des Programms ist die jeweilige Epoche Time des gewählten Keplerdatensatzes. Für diesen Zeitpunkt werden zusätzlich die benötigten Orbitdaten von Sonne und Mond berechnet. Alle interessierenden Daten werden als erste Zeile in die jeweiligen Ausgabefiles geschrieben. Dann wird die Uhr um 1 Tag weitergestellt und ein neuer Datensatz für diesen neuen Tag berechnet. Das ganze geschieht 7305-mal. Einmal im Monat erfolgt die oben erwähnte Ausgabe, also 240 Datenzeilen je File für 20 Jahre.

5.2 Der Programmablauf

Das Programm ist eine Top-Down-Programmierung mit wenig Verzweigungen. Daher bietet ein Flowchart kaum zusätzliche Programmierinformationen. Der Programmablauf wird als Textfolge dargestellt und kann an Hand der Quelle „P3Orbit.doc/-pdf“ verfolgt werden.

Der Quelltext ist in Modula-2 geschrieben. Diese Sprache ist fast identisch mit Pascal. Die Procedures und Funktionen der Programmiersprache gehen aus den IMPORT-Aufrufen am Anfang des Programms hervor. Selbstgeschriebene Procedures sind in der Quelle aufgeführt. Die Konstanten- und Variablenzusammenstellungen bieten eine gute Übersicht über die im Programm verwendeten Größen. Die Kommunikation mit dem Bildschirm wird in der Auflistung nicht erwähnt.

* Abholen der Keplerdaten des vorgewählten Satelliten aus dem File „P3Orbit.kep“ für die Berechnung der Startdaten
* Berechnen der großen (a) und kleinen Halbachse (b) der Satellitenbahn
* Berechnen der Apogäum- (h_a) und Perigäumhöhe (h_p)
* Setzen der Rechneruhr auf (ET) des Keplerdatensatzes(Startzeit des Progamms)
* Berechnen des Sun Angles (SA)
* Berechnen des Julianischen Datums (JD)
* Berechnen der Orbitdaten mittlere Länge der Sonne (L) und des Mondes (l), des aufsteigen den Mondknotens auf der Ekliptik (Ω_{Ek}), der Mondinklination (i_M), der Länge des aufsteigenden Mondknotens-Äquator (Ω_{Ae}) und des Positionswinkels zum Mond (u_M)
* Ausgabe der Anfangsdaten auf die 4 oben erwähnten Datenfiles „Ph3Tab1...4. ASC“
* Berechnen der Gravitationskonstanten K_{Moon} und K_{Sun}
* Start der Berechnungen für 7305 Tage (Schleifenbeginn)
* Berechnung der Bahnebenen- ($\Delta\Omega$) und Apsidendrehung ($\Delta\omega$)
* Berechnen der Richtungsparameter zur Sonne (A_S, B_S, C_S)
* Berechnen der täglichen Abweichung von Exzentrizität (Δe_S), Inklination (Δi_S), R.A.A.N. ($\Delta\Omega_S$) und Pergäumwinkel ($\Delta\omega_S$), verursacht durch die Sonne
* Berechnen der Richtungsparameter zum Mond (A_M, B_M, C_M)
* Berechnen der täglichen Abweichung von Exzentrizität (Δe_M), Inklination (Δi_M), R.A.A.N. ($\Delta\Omega_M$) und Pergäumwinkel ($\Delta\omega_M$), verursacht durch den Mond
* Addition der täglichen Abweichungen $\Delta\Omega$, $\Delta\omega$, Δe_S, Δi_S, $\Delta\Omega_S$, $\Delta\omega_S$, Δe_M, Δi_M, $\Delta\Omega_M$ und $\Delta\omega_M$ zu den vorherigen Werten von e, i, Ω und ω
* Inkrementierung der Zeit um 1 Tag
* Berechnen des neuen Julianischen Datums (JD)
* Berechnen der neuen aktuellen Werte von L, l, Ω_{Ek}, i_M, Ω_{Ae} und u_M mit den neuen Werten von e, i, Ω und ω
* Überprüfen des Kalendertages; falls es der 15. eines Monats ist, erfolgen Fileausgaben
* Rücksprung zum Schleifenbeginn; Ende, falls die Schleife 7305-mal durchlaufen wurde
* Zurücksetzen der alten (korrigierten) Computerzeit - Programmende

6. Schlussbemerkungen

Zwei Gründe haben den Verfasser dazu bewogen, diesen Artikel zu schreiben:

1. Die Entscheidung des AMSAT-DL Vorstands, einen neuen Satelliten zu bauen, der, ähnlich AO-10 und AO-13, auf einen hochelliptischen Orbit transportiert werden soll,
2. die Umfrageergebnisse des Journals bei den Mitgliedern, die ein großes Interesse an mathematischen und physikalischen Beiträgen unserer Zeitschrift haben.

Das Durcharbeiten dieser Abhandlung ist nicht ganz einfach, das Erstellen eines Rechnerprogramms ebenfalls nicht. Um ein Erfolgserlebnis zu haben, ist es nicht erforderlich, alle Literaturstellen von vorne bis hinten durchzuarbeiten. Ein gezieltes Durchlesen reicht.

Zum behandelten Thema stehen viele Graphiken und auch die benutzte Software, Top Speed Modula-2, zum Downloaden auf der Homepage des Verfassers (s.o. jedoch ohne ZIP-File-Erweiterung) zur Verfügung. Es handelt sich um DOS-Software, die auch unter Windows läuft.

Die Genauigkeit des Programms kann an Hand der Keplerdaten von AO-13 überprüft werden: Man nehme einen der ersten Datensätze und vergleiche das Ergebnis mit dem Absturztermin. Ohne Berücksichtigung des Einflusses der Erdatmosphäre, die den Absturz beschleunigt, errechnet das Programm einen Zeitpunkt, der ca. vier Wochen später als der tatsächliche Absturz liegt. Zu berücksichtigen ist dabei, dass für 8.5 Jahre **nur 1 Datensatz** benutzt wird, der auch fehlerhaft sein kann.

Das Ergebnis einer Anwendung des Programms „P3Orbit“ ist der Beitrag „Die Beeinflussung der Perigäumhöhe von AMSAT OSCAR-40 durch Sonne und Mond“.

An dieser Stelle möchte sich der Verfasser bei OM Dr. Viktor Kudielka, OE1VKW, recht herzlich für die vielen Beiträge und den mit ihm geführten Schriftwechsel bedanken. Beides hat wesentlich das Interesse für die oben beschriebenen Vorgänge gefördert und zum Gelingen der Entwicklung des Computerprogramms beigetragen.

7. Literaturstellen

[1] Peter Gülzow, DB2OS, "AMSAT P3-Express", AMSAT-DL Journal Nr.4, Jg. 29, Dez./Febr. 2002/2003

[2] Manfred Maday, DC9ZP, “Funkbetrieb über Satelliten”, AMSAT-Warenvertrieb

[3] Norbert Notthoff, DF5DP, "Das Projekt AMSAT Phase-3D", CQ-DL 2/97 bis 8/97

[4] Viktor Kudielka, OE1VKW, Walter Drahanowski, OE1WDC, "Phase 3D - Feasibility Study of Launch Sequences and Orbits", Austrian Radio Amateur Society, OEVSV, May 1994

[5] Viktor Kudielka, OE1VKW, "P3-D Launch Sequence Study", Part 1 bis 4, oe1vkw@oe1xtu.ampr.org

[6] Viktor Kudielka, OE1VKW, "Alternative Start Sequences and Orbital Evolution of P3-D", Proceedings of AMSAT-NA, 15th Space Symposium 1997

[7] Viktor Kudielka, OE1VKW, "Balanced Earth Satellite Orbits", Celestical Mechanics and Dynamical Astronomy 60, 1994

[8]Viktor Kudielka, OE1VKW, "Positioning a Satellite for Right Ascension and Argument of Perigee", SIXTH AMSAT-UK COLLOQIUM 1991

[9] Cook, G.E. "Luni - Solar Pertubations of the Orbit of an Earth Satellite", The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol.6, No.3, April 1962

[10] Oliver Montenbruck, "Grundlagen der Ephemeridenrechnung", Taschenb. Nr.10, Verlag Sterne und Weltraum, Muenchen

[11] James Miller, G3RUH, "Sun is Up",
OSCAR NEWS 1984/85